# 一沙一世界

—— 现代数学物理的世界

孔良
深圳量子科学与工程研究院，南方科技大学

2018年11月13日，哈尔滨工业大学

*To see a world in a grain of sand,*

*And a heaven in a wild flower,*

*Hold infinity in the palm of your hand,*

*And eternity in an hour.*

---- William Blake, “Auguries of Innocence”

一花一世界，

一沙一天国；

君掌盛无边，

刹那含永劫。

-- 英国诗人威廉·布莱克(李叔同译)

每一门科学，当我们不是将它作为能力和统治力的工具，而是作为我们人类时代以来孜孜追求的对知识的冒险历程，不是别的，就是这样一种和谐，从一个时期到另一个时期，或多或少，巨大而又丰富：在不同的时代和世纪中，对依次出现的不同的主题，它展现给我们微妙而精细的对应，仿佛来自虚空。

—— Alexander Grothendieck《收获与播种》

Alexander Grothendieck

- 每一个活跃在数学物理这个领域的科学工作者大概都会认同一点：我们身处一个数学物理的黄金时代。其日新月异的发展除了带来崭新数学结构的大爆炸，更有想象力的不断突破，后者足以激起年轻人的激情与梦想。

- 不过激情与浪漫不足以打动冷静傲慢的哲学家。从哲学家的角度看，他们有足够的理由对这种浪漫主义嗤之以鼻。

- 所以我们要问的是：这个所谓的黄金时代是昙花一现的时尚，或是是王婆卖瓜式的自我推销，还是对一个影响历史进程的洪流的准确预言？

- 要解答这个问题，我们必须对我们身处的这个历史时代做深层次的解读。当然我们的真正目的并不是去解答这个“肤浅”的问题，而是去探求我们在历史发展的脉络里的真正位置，从而了解这个时代赋予我们的机遇与使命。

- 我们这里所关心的“历史”无非是“人类世代以来孜孜追求的对知识的冒险历程”。每一个科学工作者大概都可以从自己亲历的冒险之旅中，深深地体会到历史潮流的一涨一落对自己的学术生命的深刻影响。
- 不论是出于对命运无常的敬畏，还是冒险家求生的本能，或钱权名欲的诱惑，或者是对探索本身的意义和使命的宗教式反思，我们都会试图去了解隐藏在那些“依次出现的不同主题”下面盘根错节的联系。这些联系不是别的，就是一种结构，一种和谐：巨大且丰富，微妙且精细，“仿佛来自虚空”。

通过对这些精细结构的解读，来试图让读者相信：

- 现代数学物理的发展有能力把很多以前相对独立的数学分支统一在一个自然和谐的框架下，这种统一会为很多困难的问题带来全新的解决方案。
- 从一个更深层的角度讲，由现代数学物理生出更多全新的问题，这些问题是如此的基础，以至于把不同的数学分支和数学以外的领域，包括计算机科学，逻辑学，物理，甚至生命科学，在最底层汇聚到一起，从而有可能改变数学的全貌，并且对数学以外的领域带来广泛深刻的影响。

# 数学物理的传统

- 数学的发展的一个原动力就是去认识我们的物理世界。
- 这种联系在古希腊时代的许多学派（如毕达哥拉斯学派）的学说中是显而易见的。几何学是数学的一个重大分支，而在希腊语里“几何”这个词就是指测量大地的意思。
- 反过来，对物理世界的描述和深入理解又需要数学这样精确的语言和方法。

数学和物理这种不可分离的关系一直伴随着数学发展的每一个重要时期。

- 牛顿的科学革命的同时创造了微积分，从而成就了数学本身的大发展。

牛顿：物理学家，数学家，自然哲学家，神学家，炼金术士。

- 特别值得一提的是，牛顿本人在他的《原理》一书中没有用他发明的微积分来叙述，而是为了向欧几里德致敬，用了传统的几何学。但是在他的力学理论被欧洲大陆最终被普遍接受的过程中，欧拉用微积分的语言写下的《力学》扮演了重要角色。

全新的物理理论往往需要全新的数学理论。这个现象在物理历史上屡见不鲜。不但如此崭新数学的出现也可看作是物理革命的一个征兆。

除了微积分还有一个例子就是爱因斯坦的广义相对论之于黎曼几何。

- 黎曼创立黎曼几何的一个初衷就是希望能够把很多复杂的物理现象看成（高维的）非平凡的几何现象。爱因斯坦的广义相对论可以看成黎曼这一理想的一个完美实现。

- 黎曼几何在广义相对论之后成为了数学里面的一个主流分支，在20世纪的数学里大放异彩，它的一个广为人知的应用就是解决了拓扑学里著名的庞加莱猜想。

其实黎曼的原始思考远远超过广义相对论这样的应用。

- 黎曼认为大尺度上的几何就是黎曼几何及其高阶推广。
- 黎曼提出小尺度上的几何基础要由将来的微观物理来决定，黎曼甚至提出空间在微观上有可能是离散的。

# 数学物理的统一

- 自然哲学家：牛顿，欧拉，高斯，黎曼，拉普拉斯，拉格朗日，庞加莱，希尔伯特，爱因斯坦，狄拉克，冯.诺依曼，外尔，。。。，
- 当代人物：Witten, Kontsevich, Connes, Manin, Yau, Drinfeld,Moore, Vafa, Gaiotto, Costello, …… too many.
- 但是这个统一似乎和我们在大学里面看到的数学和物理基本分开的大学教育现状是矛盾的。
- 为什么？

# 20世纪中叶的数学和物理的分道扬镳

- 20世纪（20-70）出现了一个比较奇怪的现象就是数学和物理走上了两条相对独立的发展道路。这不是历史的常态，只是历史的一个小涨落。
- 现在回头看来大致有两个原因：

- 量子力学的出现和牛顿力学的出现的一个显著的不同是：它没有带来一个全新的“量子微积分”。所以量子力学完全缺乏几何直观，所有人在学习和掌握它的时候都会觉得非常困难。即使到现在物理学界也没有对量子力学的基础有一个统一的看法。物理学家为了能够继续往前走而发展的很多不严格的超常规的做法，比如量子场论中的重整化技术，使得数学家望而生畏。

- 数学也有愈来愈形式化的趋势，比如布尔巴基的影响，还有就是和传统微积分的语言迥然不同的范畴学的语言的广泛应用（特别是在代数几何里）。数学的体系已经发展到了一个如此丰富和成熟的阶段，以至于大家相信数学不需要外部的动力也可以自己持续发展。

- 在这一期间，双方都没有给对方带来显著的影响，不但如此数学和物理似乎都把对方视为前进的包袱，想要努力甩掉包袱，轻装上路，寻求自己独立发展的自由空间
- 一方面，物理学家由于实验手段的突飞猛进，很多大自然的全新结构被揭示出来，这些崭新的发现所带来的紧迫感，使得物理学家希望摆脱严格性的束缚，在没有完善的数学和哲学基石的情况下阔步前行。物理学家也因此取得了不可思议的辉煌成就，这些成就深刻地改变了物理的全貌，甚至改变了我们的生活的方方面面。
- 另一方面，数学家也努力地使得所谓的“纯数学”成为数学的核心，而其他和应用相关的数学则被视为应用数学，甚至是含有贬义的“不纯”的数学。数学成了一个完全独立于自然科学的学科。虽然这个纯数学运动从19世纪就开始了，但是到了20世纪中叶对数学纯粹性的追求才真正到了顶峰。

- 其实纯数学运动是一个非常自然的诉求，她有非常底层和内蕴的动力，对此庞加莱表述的十分恰当：
- On the one side, mathematical science must reflect upon itself, and this is useful because reflecting upon itself is reflecting upon the human mind which has created it, the more so because, of all its creations, mathematics is the one for which it has borrowed least from outside. … The more these speculations depart from the most ordinary conceptions, and, consequently, from nature and applications to natural problems, the better will they show us what the human mind can do when it is more and more withdrawn from the tranny of the exterior world; the better, consequently, will they make us know this mind itself.

- 20世纪发展起来很多数学，特别是那些完全脱离物理应用的学科：抽象代数，代数几何，代数拓扑，范畴学等等都可以看做是讲述人类抽象思维是如何工作的研究报告。脱离了物理学的影响，数学家同样取得了不可思议的辉煌成就。

- 庞加莱的思考也可以应用在物理上面，毕竟物理是一门以实验为主导的自然科学，她内在的驱动力并没有对严格性有严格的要求，对一些自然现象的理解保持灵活的和直觉上的理解，是物理学家探索未知时不可缺少的状态，这一特点也使得整个学科保持永恒的活力。总而言之，从学科内蕴的特征上看，核心数学和核心物理的分离是学科发展的必然趋势。

- 不过两大核心的自然分离并不能推出数学和物理的完全分离的结论。但是历史的单摆总是不愿意在平衡点过多地停留，两个核心的分离使得广阔的中间地带变得过度的荒芜，随着两大核心的体量的增加，吸力也越来越大，荒芜的地带会变得更加荒芜。时间长了不同核心地带的居民也变得陌生起来，甚至有了敌意。

- 一方面，一些物理学家认为数学家不会提供任何物理学家自己做不出来的结果，认为对数学严格性的追求会阻碍物理的发展，甚至认为过多的数学训练会阻碍物理直觉的培养。其中的代表人物是费曼，物理学家徐一鸿先生曾写过：“事实上，大统一理论的创造者，以及大部分1970年代的粒子物理学家，都十分费曼，很蔑视数学，有次费曼和我一起看秀，他告诉我数学物理那些华而不实的东西，应用到物理时根本连马尿都不如[3]。”

- 另一方面，一些纯数学家也对应用于科学的数学产生了鄙夷之心。 其中极具代表性的就是英国数学家哈代[4]，他认为应用数学试图把物理真实用数学语言表达，这些数学往往肤浅且无趣；而纯数学则在寻求独立于物理世界之外的真知，具有永恒的价值。具有讽刺意味的是，为了自圆其说，哈代认为广义相对论和量子力学是优美的纯数学，因而无用。

- 数学和物理的分离是如此彻底，以至于即使在同一个人的身上她们也可能是分开的。既是物理学家又是数学家的戴森曾说, 他错过了发现模形式和李代数的深刻关系，是因为物理学家的戴森并不和数论学家的戴森交流。

- 在这一期间，数学物理这个名词被限制在一个很小的范围内，比如用分析的方法来研究广义相对论中的方程和统计物理模型。（广义函数，群表示论除外）

- 虽然这个分离时期在70年代规范场论的兴起和80年代弦论的发展后就已经结束了，但是它给我们这个时代的留下的“后遗症”还广泛地存在，而且影响深远。

在交流上，它表现为数学家和物理学家的互相不信任。

- 这从数学家的角度来说比较容易解读，就是物理学家说的量子场论以及重整化之类的工具都完全不可理解，它们的真实存在性令人怀疑。
- 从物理学家的角度来说比较不简单，上个世纪的物理学在没有量子力学（或量子场论）的严格数学基础的帮助下，取得了巨大的发展，使得物理学家相信数学家不会给物理学家提供任何物理学家自己做不出来的结果，认为对数学严格性的追求会阻碍物理的发展，甚至认为过多的数学训练会阻碍物理直觉的培养。

在教学上表现为：

- 数学专业的学生几乎不要求现代物理学的任何知识。
- 而物理专业的学生也对现代数学特别是比较形式化的课题，如代数拓扑，代数几何，抽象代数，表示论等等缺乏基本的了解。
- 而过去30年间数学与物理的大融合和大发展造成了学生很难通过正规渠道来跟上这个发展，对于是不是应该提出一个针对培养数学物理方向上的学生的教学方案的这样问题也没有被提到讨论的日程上来。

以上我们简略地分析了在上个世纪中叶数学和物理的分离，虽然很多人都是在那个环境里面成长起来，但是我们想强调的是这不是漫长的数学物理传统。在我们转向现代数学物理新潮流之前，我想还加一个remark：

- 数学物理在上个世纪中叶的分离是那个时代的主流，但是还是有些深刻的思想家对此“潮流”发出深刻的警告。

當一個數學學門開始遠離其經驗根源，或者更甚者，如果這個學門只是從「實在」源頭間接啟發的第二、第三代學門，其處境就會非常危險。這個學門會越來越傾向純粹的美學化，純粹「為藝術而藝術」。如果這個領域的周遭主題仍然和經驗世界有緊密接觸，或者，這個領域的領導者具有非常優秀成熟的品味，這種情況也許不能算糟。但是嚴重的危險在於，這個主題會沿著阻力最小的路線前進，就像遠離根源的河流岔出許多無意義的分支，因此這個學門就會充斥一團毫無條理的細節和複雜內容。換句話說，在遠離經驗根源後，或經過抽象化的近親繁殖後，這個數學主題就有萎縮的危險。這就像建築或繪畫一樣，起初通常是古典風格，但是當巴洛克的跡象顯露時，危險的訊號就出現了。

——— 冯. 诺伊曼

# 数学物理新潮流

- 量子场论早期的发展主要是以微扰论为主要研究方法，而孕育而生的重整化的方法对数学物理的对话起到了一定的阻碍作用。
- 到了70年代整体的非微扰的研究量子场论的方法开始和近代数学的课题有了广泛的接触，特别是规范场论和纤维丛理论完美对应，大大促进了数学家和物理学家的重新对话，它的一个直接的结果就是80年代Donaldson理论的发现和对4维拓扑的深刻影响。
- 而这种对话更由于80年代弦论的兴起而达到了全新的高度。

弦论可能是目前对数学要求最高的物理理论，

- 它所需要的数学大多是数学里面没有的崭新的数学，而这种新数学又与广泛的数学分支，例如：代数拓扑，代数几何，微分几何，算子代数，表示论，分析学，概率论，范畴学，数论等等，有着深刻的联系。
- 借助这种联系和由量子场论带来的独特的视角，弦论学家得到了一系列惊人的数学结果，引起了数学家的广泛的注意。一时间很多弦论学家，如Witten, Vafa, Seiberg, Moore等等， 成了数学新潮流的领路人。
- 从80年代到现在这个新潮流并没有出现任何衰退的迹象，反而有越演越烈之势。

# 是潮流，还是时尚？

- 那么对于还没有入行的年轻人，我们是不是应该鼓励他们跟上这个新潮流呢？
- 但是我们不是又常常听到做学问不能跟风的劝告吗？ 比如陈省身先生说：数学是自由的。
- 从个人角度，这个问题是没有答案的，因为个人的选择总是很私密的，不可一概而论。
- 但是学科的发展和停滞确有其历史规律，我们能做的只是从历史的角度来分析这个潮流的特点，从而了解我们这个时代的责任与机遇。

- 带着这些疑问，我们来仔细看看过去30年在数学物理领域发生了什么。
- 我们先从现象学的角度上来看。弦论或量子场论对数学的方方面面产生了影响。
- 几何：Mirror symmetry, quantum cohomology, Gromov-Witten invariants, elliptic cohomology, Fukaya category, Frobenius manifold, Virasoro conjecture, non-commutative geometry, derived algebraic geometry, Ricci flow, ……
- 拓扑：Jones polynomial, Donaldson theory, Chern-Simon theory, Seiberg-Witten theory, Khovanov homology, topological field theories, Heegaard-Floer homology, factorization homology, ……

- 代数及表示论：chiral algebra, quantum group, modular tensor category, vertex operator algebra, subfactors, conformal net, fusion category, algebras in a tensor category, chiral homology, A-infinity (L-infinity, G-infinity, …) algebras or categories, infinity categories, operad, PROP, geometric Langlands correspondence,……
- 概率论：stochastic Loewner evolution, conformal field theory, ……
- 数论：Langlands 纲领（与电磁对偶），拉马努杨公式，……

从表面上看，量子场论席卷了数学的大部分领域，似乎在扮演着统一数学的角色。

- 不过对很多人来说，这可能是一句空洞无物的话。
- 比如鸟叔的《江南style》也席卷全球，是不是鸟叔也要统一全球!?

我们需要离开现象学的表面去探究导致这些现象的深层原因。

# 无穷自由度系统

- 老子说“道法自然”，大自然是我们的最佳导师。物理学家在大自然的“逼迫”下不得不研究多体（或无穷自由度）系统及其现象，比如：相变。而由此而诞生的物理理论：统计物理和量子场论，是大自然对数学家的馈赠。

- 这个馈赠总结出来就是一条短信息：

无穷维上存在有限维根本看不到的美妙数学结构

（量子场论，弦论，。。。）。

# 这个信息不简单

- 大家想想看，单凭想象力，你能想到的无穷维的数学结构是什么？
- 无限维的流形，无穷维的李代数，无穷维的函数空间，算子空间，。。。
- 上面提到的都是把有限维上的结构简单地推广到无限维。我们在不知不觉中已经陷入了一个看不见的牢笼。

- 一个打破这个牢笼的问题是：有没有一个有限维上根本看不见的，只生活在无限维上的数学结构？
- 令人惊叹的是量子场论给出了很多这样的数学结构！

举个例子：第一个被构造出来的2维量子共形场论：

- **Moonshine共形场论:**
  - 她自己是一个顶点算子代数。
  - 她的配分函数是 **J(q)**, 是数论里面非常重要的所有模函数的生成函数。
  - 她的自同构群是最大的有限散单群：魔群（**monster group)**。
  - 她包含了**48**个统计物理中的**Ising**模型的某种极限。

- 可以想象，这样的无穷维的非平凡的结构的存在本身就是非平凡的。所以量子场论的数学完整的构造往往非常困难。
- 抛开完整的构造不谈，单单她的存在性已经是个奇迹。已经可以解释，为什么我们生活在数学结构大爆炸的时代。当我们透过不同的有限维或无限维的窗口去看，我们可能会看到很多完全不同的数学景象。
- 比如：一个2维超共形场论里面可以看到很多不同的李代数，结合代数，Hopf 代数，A，C，G－infinity代数。

- 这种允许完全不同的数学结构在其上生长的东西，真是不可思议的怪物了。
- 也许这就是老子说的：大音希声，大象无形。
- 我们的宇宙是不是就是这样无穷维的怪物？
- 藏在神秘的量子涨落，量子纠缠等现象的背后是不是一个无穷维的几何？

- 今天几何学家已经熟知了有些有限维流形的问题，可以通过对无穷维的loop space的研究来解决。
- 而拓扑学家也经常强调要去看无穷维的(co)chain space上的结构，而不仅仅是看（上）同调。
- 其实真正重要的还不是解决了以前的问题，而是发现了一个全新的数学新大陆，在等着我们去探险。

- 也不难理解为什么我们生活在一个数学结构大爆炸的时代，因为不同的视角会看到不同的数学景象。
- 仅仅是其中的一些应运而生的新的数学结构已经是足够的宏大和丰富，足以让数学家研究很多年。似乎数学才刚刚开始。

- 所以推动这场数学的新潮流，以及数学结构的大爆炸的幕后推手，既不是一两项新的技术，也不是一两个深刻的思想，而是广袤无边的，完全未开垦的数学新大陆。至少从数学的角度看，基于以上的分析，我们已经有理由相信这个由量子场论而来的研究无穷维数学结构的潮流不是一个昙花一现的时尚，而是一场革命性的洪流。

- 它应该就是陈寅恪先生在《陈垣敦煌劫余录序》中所提及的“此时代学术之新潮流”：

一时代之学术,必有其新材料与新问题。取用此材料,以研求问题,则为此时代学术之新潮流。治学之士,得预于此潮流着,谓之预流(借用佛教初果之名)。其未得预者,谓之未入流。此古今学术史之通义,非彼闭门造车之徒,所能同喻者也。

——陈寅恪《陈垣敦煌劫余录序》

**注：**预流，声闻乘（也就是小乘）的四个果位（境界）：预流果，一来果，不还果，阿罗汉果。

- 也许人类的想象力终究还是抵不过大自然的馈赠，数学在纯数学化运动之后不久，就迎来了以物理学的全面入侵，数学终于又重新拥抱大自然了。
- 量子场论带来的无穷维的新数学和传统的数学有什么不同的特征呢？
- 真的有很多不同，需要很完整的分析，我们这里只想借助于无穷维的图像来给出一些简单化，但是可能仍然有启发的解读。

在数学内容上，无穷维的数学展现出很多新特征和新现象，比如高阶同伦论和高阶范畴的应用，丰富的形变理论和模空间问题，很多神奇的对偶现象，等等。每一个现象都值得我们做深入的分析和解读。而在这里我们仅仅简单谈谈下面几个新特征。

- 代数方法的重要性
- 范畴学的兴起
- 物理图像对无穷维数学的研究有不可思议的有效性

- **代数方法的重要性**：传统物理学大厦建立在微积分的基础上，牛顿把经典力学问题完全化成了微分方程的问题，电动力学和广义相对论也都建立在微分方程的基础上，所以分析的方法在经典的数学物理里面占有举足轻重的地位，大多数物理学家因此相信，方程是表达宇宙的永恒规律的唯一语言，写下以自己名字来命名的方程式大概是几乎所有物理学家的梦想。量子力学的诞生以后，虽然方程仍然是主流语言，比如：薛定谔方程，狄拉克方程，但是代数的方法也越来越重要，特别是表示论的重要性变的显而易见，群论和群表示论也已经从最初的一个纯数学分支变成了所有物理学家的通用语言。而且从量子力学的起源上看，海森堡从可观测代数的角度给出的量子力学描述可能更加基本。量子场论兴起以后，分析的方法在半经典的近似下仍然有很大的作为，但是对完全量子化的场论显得有些力不从心，其跟本原因是量子物理和牛顿的经典时空观念是格格不入的，而从描述量子世界的数学语言上看，微积分在本质上就是不够的，我们需要一个新的量子化的微积分

- 这里的“量子化”有两个不同又彼此相融的意思[8]，
  - 一是在量子物理中，可观测量构成一个非交换的代数（海森堡图像）。如果和量子力学的建立一样，我们把可观测量看做是构建新的微积分的出发点的话，那么代数方法将是这个新微积分的核心，法国数学家Alain Connes发展的非交换几何是这一个思路的代表；

- 另一个是路径积分的，从这个角度看需要无穷维，因为路径空间是无穷维的。从无穷维的角度看，实数就不是一把测量无穷维数学世界的好尺子。所以很多无穷维空间就没有传统意义上的取实数值的测度。这时候我们需要用无穷维的尺子来测量无穷维的世界。在我们寻找适当的测量无穷维的尺子的时候，尺子内蕴的结构变得更为重要。也许我们最终还是要建立完备的分析的方法和理论，但是这个理论必须建立在我们对无穷维相关数学的基本代数结构的理解之上，就好像实数是由有理数完备化而来，但是这个完备化依赖于有理数上面的代数结构。所以对无穷维上面的数学结构的理解，应该放在完备化之前[9]。

70年代以前，物理中的代数方法主要是指群论，现在越来越多的代数结构开始在量子场论的研究中大展身手，比如：无穷维李代数，A-infinity (C-,L-infinity, etc)代数, Hopf代数, 顶点算子代数, 张量范畴, factorization algebra,等等。

## 范畴学的兴起：

- 范畴学起源于代数拓扑。1942-45:Eilenberg, Mac Lane 引入了category, functor, natural transformation; 1948:Sameul 引入universal property, 1958: adjoint functor (Kan), monad(Godement), …
- 60年代Grothendieck将其变成了代数几何的基础语言，换句话说Grothendieck写下了一种基于范畴学的结构化的微积分。
- 范畴学的基本精神就是对象之间的相互关系比研究对象更基本。
  - 1 is a set such that there exists a unique map from any set to 1.
  - 0 is a set such that there exists a unique map from 0 to any set.
  - 1+1 is a triple (1+1,a,b): (1→1+1←1) such that for any two maps f: 1→X, g: 1→X, there exists a unique map h: 1+1 →X such that ha=f and hb=g.
  - 表面上看起来，范畴学似乎是杀鸡用牛刀，一旦我们面对的是富含非常复杂的数学结构（比如：无穷维）的问题的时候，范畴学会不可思议地强大。
- 范畴学对数学概念做了巨大的集成，数学概念：limit, colimit

- 60年代以后，其影响逐渐辐射到很多其他领域，因而成就了一股范畴论替代集合论的潮流。
- 到了90年代这个潮流非但没有衰减，反而有了新的强大动力：量子场论或无穷维的数学结构。
- 为什么无穷维的数学要用到范畴学？从代数上看，如果我们测量无穷维结构的尺子是实数（或复数），很多场论的问题就可以化成无穷维的线性代数问题，但是用有限维的尺子去测量无穷维是没有效率的，而特别有效的尺子本身往往就是无穷维的，用了这样的尺子，很多场论的问题都可以转化成在不平凡的张量范畴里面的代数问题。

- 更多的时候，无穷维丰富的数学结构会让研究者非常迷惑，而范畴学对数学做了一个巨大的统一，很多不同领域看似不同的数学概念，在范畴学的视角里不过是不同范畴里的同一概念。所以研究无穷维的问题的时候，范畴学变成了非常有用的语言和导向性工具。
  - 比如：弦论里面，在范畴学的意义下，闭弦理论可以看作是开弦理论的中心。没有范畴学的语言，根本无法陈述这个关系。
- 不但如此，在物理里面，没有结构的“存在”是不存在的，即使是“点粒子”也不是数学意义上的点而是有很多结构，很多时候我们希望能够在每一个“点”都带有丰富结构的“数域”上积分，而范畴学其实就提供了一个结构化的微积分。

- 量子物理在很多基本方面都暗合范畴学的基本精神。比如，量子理论把可测量提到一个最本质的层次，可测的不是基本粒子，而是他们之间的相互作用。

- 没有相互作用，测量也是不可能的；而范畴学的基本精神就是认为对象之间的相互关系比对象更重要，甚至对象本身就是所有相互关系的反映＝Yoneda Lemma, 比如：
  - X是一个空间。如何理解空间里的一个点? X 中的一个点就是一个映射:{*} → X.
  - V是实数R上的一个线性空间，V 里面的一个向量v, 其是就是一个线性映射 R→V, 完全决定于1的相v.
  - 范畴学的口号就是：不要问里面有什么东西，要问有什么样的相互关系。这个语言在我们描述其他更复杂的子空间的时候就非常方便。

- 范畴学的革命是如此的基础，可以想象范畴学的思想已经渐渐渗透到很多领域：数理逻辑学，数学，物理，计算机科学，信息学，语言学，哲学，经济学，等等。
- 比如： 范畴学是functional programming的理论基础。我无法想象范畴学将来在人工智能里面没有用。

## 物理图像对无穷维数学的研究有不可思议的有效性：

- 我们熟知的一个著名问题是：为什么数学对物理有不可思议的有效性（unreasonable effectiveness）？而物理图像对无穷维数学的研究有不可思议的有效性，则是一个全新的现象。

- 一个无穷维的数学结构，如果单从他的生成元和她们之间的关系的角度看，非常复杂，很难有什么数学直觉。但是如果这个无穷维的数学结构描述的是一个有无穷维自由度的物理系统，比如一块固体材料。我们的物理直觉，甚至就是一块固体材料在普通视觉下效果，也已经是做了很复杂的重整化计算的结果，即把所有微观自由度积分积出来的结果。这一个过程从数学上看是非常不平凡的，也就是说有时候物理直觉本身就是一个不平凡的对无穷自由度的计算结果。也许这就是物理图像对无穷维数学的研究有不可思议的有效性的一个重要原因。

- 不但如此物理学家还发明了很多探索无穷维世界的理论和实验工具，对一个多体系统的物理测量本身就可以看成是一个对无穷维数学结构做了复杂计算之后而得到的整体的不变量。 这个是传统的数学里面难以理解的强大工具。
- 虽然我们还不能理解这种“超越性计算”的数学本质，但是可以肯定的是这是物理学或大自然给数学家的馈赠。

- 另外借助这个语境，我们顺便提一下，无穷维的数学世界展现了很多神奇的对偶现象，可以理解成某种非线性的傅立叶变换。他们往往能够把复杂难明的现象化成对偶世界里面的简单现象，从而给很多难题带来不可思议的解决方案：比如：Mirror Symmetry.

- 这些对偶并不是局限在数学结构之间的同构，可以是更弱意义下的对应，比如很多多体系统和场论里面的boundary-bulk duality。这些看上去低维度的多体系统能够和高维度的多体系统之间有对偶，其根本原因是二者本质上都是无穷维的。

- 甚至在无穷维的数学世界里面，如果有一个建立在无穷维的数学结构为基础的几何的话，其中一个所谓的“点”也可能都是无穷维的。

# 数学内容以外的特征

- 下面我们要来谈谈无穷维的数学世界在数学内容以外的新特征，特别是对刚入行的学生和研究者的挑战。
- 数学物理早已经不是仅仅是微分方程，无穷维的数学世界涵盖了几乎所有的数学领域：分析，拓扑，几何，代数，概率。
- 而我们的大学教育体系数学和物理分的很开，还是基本沿袭上个世纪数学物理分家后的“传统”。
- 也没有好的教科书。
- 所以走进数学物理会面临很大的挑战。

- 表面上的混乱：

无穷维的数学很象老子所说的大象无形，从表面上看似乎十分混乱，比如在量子场论的不同方向上的研究者似乎在用不同的数学语言，有的偏重代数，有的偏重几何，有的偏重拓扑，有的偏重分析，有的偏重用不严格的物理语言，所以即使大家都在做数学物理，交流仍然是很困难的。因为这些表面上的混乱，也为初学者入行带来了极大的困难。数学物理是不好入门的，因为第一，没有教科书；第二，范围太广，几乎涵盖了所有数学领域，正是这样的庞然大物，会让初学者常常有无从下手的感觉；第三，需要一些和别的数学学科不一样的训练，特别是需要一些物理的背景，而自学物理对数学家来讲是非常困难的。

- 内在的和谐与统一：

虽然表面上看是很混乱，但是在深处这些表面的乱象都是同一个无穷维的庞然大物的不同的侧面，因而他们有内蕴的和谐。他们在深层次上的和谐与统一，使得我们不应该把表面的现象看成混乱，而是应该看成是一种丰富的体现。是的，无穷维的数学的一个基本特征是表面的丰富和内在的统一。只有以这样的心态去看待数学物理，才会消除很多对表面上的混乱的抵触心理。她的丰富多彩与和谐统一正是你所追慕的，所以你也要接受她表面上多变的性格，并因此而爱她。

- **数学物理的哲学趣味**：一方面数学物理和对大自然的理解息息相关，所以数学物理的内涵必然是包括自然哲学的。不但如此，因为和量子引力的深刻关系，现在的数学物理在非常基础的层次上挑战我们对宇宙几乎所有的认知，这些新的挑战使得哲学家，逻辑学家，数学家，物理学家，计算机科学家开始聚合在一起，一起来面对一场非常底层的变革。另一方面不同方向的数学物理学家要交流，必须要抛开表面的，语言的和技术上的不同，而去挖掘深层次的，哲学上的共性。只有沉的足够的深，交流才是可能的。然而更重要的是，一个本质特征能够被挖掘出来，往往是因为我们先发现她会在不同数学语境里有类似的表现，而发现那些隐藏在表象背后的哲学本质本来就是数学物理研究的最根本的目标之一。数学家Gelfand 说：“不要吝惜时间来思考基础理论问题，这点很重要。…，在我们的时代，数学家应该成为自然哲学家。”

- 新的语言：

在这个充满未知的领域里面，连描述未知的语言往往也是未知的。能够描述自然法则的前提是要建立一个语言系统，而语言系统的建立本身就依赖于我们对自然法则的深刻理解，所以语言本身就是自然法则的一部分。而且语言系统的建立可能是我们在探索过程中最为艰难的步骤。用精确的数学语言把问题描述出来，或把核心结构定义出来往往是最难的。如果能做到，问题也就被解决了一大半了。

- 基础知识和技术：

当精确的数学语言把问题描述出来以后，往往会发现以前所有的数学工具都用不上，需要的是去发明全新的数学工具。虽然有的时候碰巧前人发明的数学工具可以用，但是常存这样的侥幸心理长期来讲是有害的，因为我们的目的就是去发现一个全新的数学世界。所以坚固的数学基础，广博的数学知识和强大的技术都不是探索者必需的素质。真正需要的是探索者的勇气，独立之精神和自由之思想。虽然从本质上讲，所有领域在这一点上都是一样的，但是那些相对成熟的领域对基础和技术的要求还是要高很多。

## 年青人的舞台：

- 量子场论和很多领域的数学相关，这也给刚入门的学生带来一些错觉：是不是需要懂很多数学才有可能来做数学物理？其实真实的情况并非如此，除了几个需要比较多基础知识的领域，比如镜对称（Mirror Symmetry）等，更多的方向上并不需要太多的基础知识，即使是研究镜对称也有很多不需要太多基础的入手点。更重要的是量子场论要求的数学大多是全新的数学，她们还没有被建立起来。

- 更有甚者，学了很多数学有时候甚至是有害的，因为如果学了很多数学知识放在脑子里，我们的本能就是希望有机会让这些数学知识能够发挥作用，这种功利的想法反而限制了我们的想象力。因为你面对的是一个全新的数学世界，虽然建立旧世界通向新世界的桥梁也很重要，但是这种桥梁很多时候只是涉及了新世界的枝枝叶叶，而忽略了新世界有她自己内蕴的全新的生命结构。

- 所以更重要的素质是学会放下，放下数学知识带来的包袱，用一颗自由的心去倾听。所以一个年青人虽然没有很丰富的数学知识，只要能够保持一个天真的童心和足够地努力，就有可能做出很大的突破性的工作。

- 我们简略地分析了过去30年物理对数学产生了深刻影响的原因。我们希望读者已经从我们的分析中了解了，为什么这是一场革命性的洪流，而非昙花一现的时尚。我们相信探索无穷维的数学新大陆正是这个时代赋予我们的机遇和使命。

- 如果物理对数学的影响只是单向的，那么这股潮流的生命力将减少不少。所以我们要问一个显然的问题：这些由物理学带来的数学革命最终能不能回馈物理呢？而这种回馈会不会仅仅是一些装饰性的美化？还是有可能会深刻地改变物理学？

- 让我们从拓扑序的发展来看数学物理的发展对物理学的影响（只讲和数学发展相关的部分）

# 史前史

- 1984, 数学家和物理学家几乎同时发现了2维共形场论：Belavin-Polyakov-Zamoldchikov, Frenkel-Meurman-Lepowsky.
- 1986-1987: Segal， Kontsevich独立给出2维共形场论的数学定义（a projective monoidal functor).
- 1988: Atiyah 定义了n维拓扑场论。
- 在Atiyah，Bott等影响下，1989年Witten 3篇关于拓扑场论的文章，特别：2+1D Chern-Simons field theory.
- 1989: 文小刚，张守晟等把CS theory用于分数量子霍尔效应的研究上。1989：文小刚提出拓扑序。

# 拓扑序的格点模型实现

- 1990: Dijkgraaf-Witten TQFT
- 1991: Reshetikhin-Turaev TQFT
- 1992: Turaev-Viro TQFT, 1993:Barrett-Westbury TQFT.
- 1996: Kuperberg TQFT from quantum groups.
- 1997: Kitaev's Toric code and quantum double models.
- 2004: Levin-Wen's string net models

# Gapped edges and defects

- 1999-2009: Mueger, Ostrik, Etingof, Nikshych, Drinfeld, Davydov,… developed fusion category and its representation theory.
- 2007: Fuchs-Runkel-Schweigert defects in RCFT's,
- 2009: Lurie's extended TQFT's.
- 2011: K.-Kitaev used all modern ingredients of the representation theory of fusion categories to realize all gapped edges/defects in all non-chiral 2d topological orders.

# Anyon condensation

- 1989: Moore-Seiberg 提出了modular tensor category
- 1999-2001: Boeckenhauer-Evans-Kawahigashi:
- 2001: Kirillov-Ostrik, 2006: Frohlich-Fuchs-Runkel-Schweigert.
- 2002: Bais-Schroers-Slingerland first studied anyon condensation.
- 2010: Kapustin-Saulina: classification of gapped boundaries of Abelian CS theories；2013: Levin, Barkeshli-Jian-Qi, classification of gapped edges of abelian non-chiral topological orders.
- 2013: K., the complete anyon condensation theory in the long wave length limit.

# Topological orders with symmetries

- 1996: Turaev: G-crossed braided tensor categories
- 2003-2013: Mueger, Etingof, Davydov, Gelaki,Nikshych,Ostrik, Drinfeld
- 2009: 顾-文, SPT, 2010: 陈-顾-刘正鑫-文,
- 2014: Barkeshli-Bonderson-Cheng-Wang: a mathematical theory of SPT/SET's based on G-crossed braided fusion categories
- 2015-2016: Lan-K.-Wen: a different mathematical theory of SPT/SET based on modular extension.

# Gapless edges

- 80: Halperin,
- 89-90: Witten, et al,
- 90,94,95: Wen,Wen-Wu,Wen-Wu-Hatsugai, Wen, 96: Cappelli-Zemba, …
- 1990-2008:Frenkel,Lepowsky,Zhu,Huang,Dong,Li,…, K., the mathematical foundation of RCFT's. 2002-08: Fuchs-Runkel-Schweigert
- 2014-2015: Cano-Cheng-Mulligan-Nayak-Plamadeala-Yard, Cano-Cheng-Barkeshli-Clarke-Nayak,Barkeshli-Nayak, used mathematical results in lattice vertex operator algebras.
- 2017: K.-Zheng: a unified mathematical theory of gapped/gapless edges

- 但是对更多的物理学家来讲，拓扑序不过是一个众多物理分支的一个小分支，不能用此来证明无穷维数学的进展会对物理整体带来深刻的影响。
- 我们来看看数学家的进展：
  - 拓扑场论理论的大发展；
  - 2维共形场论的数学基础的发展；
  - 规范场论微擾论的数学基础；
  - Factorization algebras,
  - Factorization homology
  - Tensor categories and algebras in tensor categories
  - Enriched monoidal categories

我们来看看物理学家面临的重大问题：

1. 量子引力：时空的起源
2. 量子场论的数学基础
3. 量子多体系统，拓扑物质态＝长程纠缠态
4. 量子纠缠的起源： 几何起源？
5. 量子信息，量子计算机，。。。

时空的起源＝量子引力＝量子几何＝量子力学的几何基础＝量子纠缠的几何本源

# 新的微积分

- 物理学家面临的问题，带给数学家和数学物理学家的重大挑战是建立一个适合于描述量子世界的新的微积分。这个新的微积分注定是无穷维的，因为解释氢原子光谱也需要量子场论。也就是说，藏在量子纠缠和量子涨落背后可能是一个建立在无穷维的数学结构上的新几何。
- 如果能够成功，将是一场非常底层的革命。
- 虽然我们还没有成功，但是仍然有很多动人的思考。

# 新的微积分的一些基本特性

无穷维带来的一个不可避免的现象是：新的几何方案可能是不唯一的。这可能就是老子所说的：大象无形。

- 量子几何观：
  1. 非交换几何 (analytic and algebraic)
  2. 无穷维的代数几何
  3. Derived algebraic geometry，
  4. higher geometry/homotopy/category theory.

# 时空与信息

- 现代物理的理论大厦是建立在时空这个基本的概念上的。如果我们需要一个时空自己的理论，我们又把什么东西当作更基本的概念呢？
- 一个很符合东方哲学的思想“有”和“无”的问题比时空更基本。“有无”就是信息。
- 现代思潮：时空是从信息中衍生出来的。
- “熵”也成为很多领域的共同语言。

# 全息原理

- 全息原理（holographic principle）
  - 宇宙的信息或熵 scale as an area law。
  - 弦论自动就能够满足全息原理，而且有可能整个宇宙的信息藏在一个“点”上。
  - 在“无穷维”的世界里的一个所谓的“点”也是“无穷维”的。
  - Can we image a new geometry with the property that a single point determines the entire geometry?

一花一世界，

一沙一天国；

君掌盛无边，

刹那含永劫。

谢谢